ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$] Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ ισχύει $f(\chi_1) = f(\chi_2)$

Αν $\chi_1 = \chi_2$ τότε ισχύει $f(\chi_1) = f(\chi_2)$

Αν $\chi_1 < \chi_2$ τότε στο διάστημα $[\chi_1, \chi_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής , επομένως υπάρχει $\xi \in (\chi_1, \chi_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = (f(\chi_2) - f(\chi_1)) / (\chi_2 - \chi_1)$. Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(\xi) = 0$ οπότε $f(\chi_1) = f(\chi_2)$.

Ομοίως εάν $\chi_1 > \chi_2$

Α$_2$] Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α$_3$] Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $\chi_o \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(\chi_o)$ όταν $f(\chi) \leq f(\chi_o)$ για κάθε $\chi \in A$.

Α$_4$] α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β$_1$] Έστω z = a + bi, $\bar{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z + \bar{z} = 2a$ Τότε η εξίσωση γίνεται $2a^2 + 2b^2 + 2ai - 4 - 2i = 0 \rightarrow 2a^2 + 2b^2 - 4 = 0$ και $2a - 2 = 0 \rightarrow a = 1, b = \pm 1$

Άρα $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$

Β$_2$] $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$

$w = 3(\frac{z_1}{z_2})^{39} = 3 \cdot i^{39} = 3 \cdot (i^4)^9 \cdot i^3 = -3i$

Β$_3$] $|4z_1 - z_2 - i| = |4(1+i) - 1 + i - i| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|u - 3i| = 5$ Άρα ο γεωμετρικός τόπος των u είναι ένας κύκλος με κέντρο το w = 3i = (0, 3) και ακτίνα 5.

ΘΕΜΑ Γ

Γ$_1$] $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$ συνεχής και παραγωγίσιμη ως λογαριθμική

$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$ άρα η h (x) είναι γνησίως αύξουσα και 1 – 1

$h''(x) = \left(\frac{1}{e^x+1}\right)' = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$ άρα h΄(x) είναι γνησίως φθίνουσα και h(x) είναι κοίλη

Γ2] $\ln e^{h(2h'(x))} < \ln\frac{e}{e+1} \rightarrow h\big(2h'(x)\big) < 1 - \ln(e+1) \rightarrow h(2h'(x)) < h(1) \rightarrow 2h'(x) < 1 \rightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \rightarrow h'(x) < h'(0) \rightarrow x > 0$

Γ3] Για να βρούμε την οριζόντια ασύμπτωτη πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim_{\chi\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x+1}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1 \rightarrow \ln 1 = 0$ οπότε η οριζόντια ασύμπτωτη είναι η $\psi = 0$

Για να βρούμε την πλάγια ασύμπτωτη $\psi = \lambda\chi + \beta$ πρέπει να υπολογίσουμε τα όρια $\lim_{\chi\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lambda$ και $\lim_{\chi\to-\infty}(h(x) - \lambda\chi) = \beta$

$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{\chi\to-\infty}\frac{\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{\frac{e^x}{e^x+1}}\cdot\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'}{1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1} = 1$

Οπότε $\lambda = 1$

$\lim_{\chi\to-\infty}(h(x) - \chi) = \lim_{\chi\to-\infty}[-\ln(e^x+1)] = 0$ Οπότε $\beta = 0$ και η ασύμπτωτη είναι $\psi = \chi$

Γ4] $\varphi(\chi) = 0 \rightarrow e^x\,(h(x) + \ln 2) = 0 \rightarrow h(x) = -\ln 2 \rightarrow h(x) = h(0) \rightarrow x = 0$
Έτσι, βρήκαμε τα σημεία τομής με τον χ΄χ και το εμβαδόν του χωρίου υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα $E = \int_0^1|\varphi(\chi)|dx = \int_0^1\left|e^x\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right|dx$ Επειδή είναι θετικό το απόλυτο φεύγει και ύστερα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα κατά παράγοντες ξεκινώντας από το e^x.

$E = \left[e^x\cdot\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot\frac{e^x+1}{2e^x}\cdot\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)'dx = e\cdot\ln\frac{2e}{e+1} - \int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx \rightarrow$
$E = e\cdot\ln\frac{2e}{e+1} - [\ln(e^x+1)]_0^1 = e\cdot\ln\frac{2e}{e+1} - \ln(e+1) + \ln 2$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1] $\lim_{\chi\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} e^x = 1 = f(0)$ άρα είναι συνεχής

Η συνάρτηση μας είναι και παραγωγίσιμη στο R* με f΄(x) = $\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$ ψάχνουμε το πρόσημο της και επειδή ο παρανομαστής είναι θετικός ψάχνουμε το πρόσημο του αριθμητή θεωρώντας τον σαν μια άλλη συνάρτηση.

Έστω g(x) = $xe^x - e^x + 1$, x∈R , παραγωγίσιμη στο R με g΄(x) = xe^x

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
g΄(x)	–	+
g(x)	↘	↗

Για κάθε χ∈R ισχύει g(x) ≥ g(0) → $g(x) \geq 0$

Άρα f΄(x) > 0 για κάθε x≠0 και έτσι η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ$_2$] α) Θεωρούμε την συνάρτηση h(x) = $\int_1^x f(u)du$ έτσι ώστε να την μελετήσουμε h΄(x) = f(x) > 0 άρα η h(x) είναι γνησίως αύξουσα και 1 – 1

f΄(0) = $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}$ = ½

και να έχουμε

$\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0$ → h(2f΄(x)) = 0 → h(2f΄(x)) = h(1) → 2f΄(x) = 1 → f΄(x) = ½ → f΄(x) = f΄(0) → x = 0

β) y(t) = $\begin{cases} \frac{e^{x(t)}-1}{x(t)} & \gamma\iota\alpha\ \chi(t) \neq 0 \\ 1 & \gamma\iota\alpha\ x(t) = 0 \end{cases}$ και y΄(t) = $\begin{cases} f'(x(t)) \cdot x'(t) & \gamma\iota\alpha\ \chi(t) \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \gamma\iota\alpha\ x(t) = 0 \end{cases}$

Από την εκφώνηση 2y΄(t) = x΄(t) , 2f΄(x(t))x΄(t) = x΄(t) , f΄(x(t)) = ½ , f΄(x(t)) = f΄(0), x(t) = 0 οπότε το σημείο είναι το (0, 1)

Δ$_3$] g(x) = $(xf(x) + 1 - e)^2 \cdot (x-2)^2 = (e^x - e)^2(x-2)^2$, x > 0

g΄(x) = $2(e^x - e)e^x(x-2)^2 + (e^x - e)^2 2(x-2) = 2(e^x - e)(x-2)(xe^x - e^x - e)$

για να βρω το πρόσημο της πρέπει να μελετήσω το πρόσημο της τελευταία παρένθεσης

$κ(x) = xe^x – e^x – e$ με $κ(1)κ(2) = (e^2 – e)(– e) < 0$ οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $ρ\in(1,2)$ $(xe^x – e^x – e)΄ = xe^x > 0$ άρα είναι αύξουσα.
Για $1 < χ < ρ$ $κ(χ) < κ(ρ) \to κ(χ) < 0$ και για $ρ < χ < 2$ $κ(χ) > κ(ρ) \to κ(χ) > 0$

x	0 1	ρ	2	+∞
$e^x – e$	–	+	+	+
$x – 2$	–	–	–	+
$xe^x – e^x – e$	–	–	+	+
$g΄(x)$	–	+	–	+
$g(x)$	↘	↗	↘	↗

Οπότε η g παρουσιάζει για $χ = 1$ και $χ = 2$ τοπικά ελάχιστα τα $g(1)$, $g(2)$ και για $χ = ρ$ τοπικό μέγιστο το $g(ρ)$