ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 2015

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εκτίμηση Θεμάτων

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας με αποτέλεσμα ένας μαθητής να μπορεί να γράψει τη βάση όμως να δυσκολευτεί πολύ στα θέματα Γ και ειδικά στο Δ όπου χρειάζονται τη μέγιστη δυνατή προετοιμασία και ικανότητα στα Μαθηματικά για να αντιμετωπιστούν.

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. Απόδειξη βιβλίου σελ. 194

Α$_2$. Θεωρία βιβλίου σελ. 188

Α$_3$. Θεωρία βιβλίου σελ. 259

Α$_4$. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β$_1$. $|z-4|^2 = 4|z-1|^2 \leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \leftrightarrow z\bar{z} = 4 \leftrightarrow |z| = 2$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 2

Β$_2$. Για να είναι πραγματικός πρέπει $\bar{w} = w$. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $z\bar{z} = 4 \leftrightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$ δηλαδή αυτό ισχύει και για τα z_1, z_2

α) $\bar{w} = \overline{(\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1})} = \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$

β) Από τις ιδιότητες του μέτρου παίρνουμε $\left|\frac{2z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = 2$ και από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $\left|\left|\frac{2z_1}{z_2}\right| - \left|\frac{2z_2}{z_1}\right|\right| \le |w| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| \leftrightarrow 0 \le |w| \le 4 \leftrightarrow -4 \le w \le 4$

Β$_3$. $\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 = -4z_1z_2 \leftrightarrow (z_1+z_2)^2 = 0 \leftrightarrow z_1 = -z_2$

$|z_1 - z_2| = |2z_1| = 2|z_1| = 4$, $|z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1||1-2i| = 2\sqrt{5}$, $|z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1||-1-2i| = 2\sqrt{5}$ Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ$_1$. f(x) = $\frac{e^x}{x^2+1}$ A_f = R Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πηλίκο εκθετικής και πολυωνυμικής.

f΄(x) = $\frac{e^x(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$

x	$-\infty$ 1	+∞
f΄(x)	+	+
f(x)	↑	↑

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} e^{\chi}\frac{1}{\chi^2+1} = 0$

f(1) = $\frac{e}{2}$

Άρα η συνάρτηση μας είναι γν.αύξουσα με σύνολο τιμών το (0, +∞)

Γ$_2$. Επειδή η συνάρτηση μας είναι γν. μονότονη είναι και 1-1.

f($e^{3-x}(x^2 + 1)$) = $\frac{e^2}{5}$ = f(2) ↔ $e^{3-x}(x^2 + 1)$ = 2 ↔ $\frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2+1}$ ↔ f(x) = $\frac{e^3}{2}$

Όμως από το προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το (0, +∞) και $\frac{e^3}{2} \in (0,+\infty)$. Δηλαδή θα υπάρχει κάποιο $\chi_0 \in R$ τέτοιο ώστε f(χ_0) = $\frac{e^3}{2}$. Και επειδή η συνάρτηση μας είναι γν. αύξουσα η ρίζα αυτή θα είναι και μοναδική.

Γ$_3$. $\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt = \int_{2x}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{4x} f(t)dt = -\int_{a}^{2x} f(t)dt + \int_{a}^{4x} f(t)dt$

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την Κ(χ) = $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ στο [2χ, 4χ] και παίρνουμε ότι υπάρχει ένα ξ∈(2χ, 4χ) τέτοιο ώστε Κ΄(ξ) = $\frac{-\int_{a}^{2x} f(t)dt+\int_{a}^{4x} f(t)dt}{2\chi}$

Η Κ΄(χ) = f(χ) και Κ΄΄(χ) = f΄(x) > 0. Οπότε η Κ΄(χ) είναι γν. αύξουσα.

Για ξ < 4χ έχουμε Κ΄(ξ) < Κ΄(4χ) δηλαδή $\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt$ < 2χf(4χ)

Γ₄. Για χ > 0 η g(χ) είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων και άρα και συνεχής.

g΄(χ) =$\left(\frac{1}{\chi}\left(-\int_a^{2x} f(t)dt + \int_a^{4x} f(t)dt\right)\right)'$ = $\frac{4\chi f(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}$ >0 αφού από το Γ$_3$ $\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt$ < 2χf(4χ) και για 2χ < 4χ ↔ f(2x) < f(4x) ↔ 2xf(2x) < 2xf(4x)

Για χ = 0

$$\lim_{\chi\to 0} g(x) = \lim_{\chi\to 0}\frac{-\int_a^{2x} f(t)dt+\int_a^{4x} f(t)dt}{\chi} = \lim_{\chi\to 0}\frac{-2f(2x)+4f(4x)}{1} = 2f(0) = 2 = g(0)$$

Άρα είναι γν.αύξουσα στο [0, +∞)

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. f΄(x)$e^{f(x)}$ + f΄(x)$e^{-f(x)}$ = 2 ↔ $(e^{f(x)})'$ +$(-e^{-f(x)})'$ = (2x)΄ ↔ $(e^{f(x)} - e^{-f(x)})'$ = (2x)΄ ↔ $e^{f(x)} - e^{-f(x)}$ = 2x + c

Για χ = 0 βρίσκουμε c = 0 οπότε $e^{f(x)} - e^{-f(x)}$ = 2x ↔ $e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}}$ = 2x ↔ $(e^{f(x)})^2$ – 2χ$e^{f(x)}$ – 1 = 0 σαν εξίσωση δευτέρου βαθμού βρίσκουμε τα εξής: Δ = 4(χ^2 + 1), $e^{f(x)} = \chi \pm \sqrt{\chi^2+1}$ για χ = 0 παίρνουμε $e^0 = 0 \pm \sqrt{0^2+1}$ το οποίο επαληθεύεται για το +. Άρα $e^{f(x)} = \chi + \sqrt{\chi^2+1}$ ↔ f(x) = ln($\chi + \sqrt{\chi^2+1}$) με χ∈ R.

Δ₂. α) Η φ$_1$(χ) =$\sqrt{\chi^2+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρίζα πολυωνυμικής.

Η φ$_2$(χ) = $\chi + \sqrt{\chi^2+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων πολυωνυμικής με την φ$_1$(χ).

Η f(x) = ln($\chi + \sqrt{\chi^2+1}$) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων λογαριθμικής με την φ$_2$(χ).

f΄(x) = $(\ln(\chi+\sqrt{\chi^2+1}))΄ = \frac{1}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{\chi^2+1}}2x\right) = \frac{1}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}\left(\frac{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}{\sqrt{\chi^2+1}}\right) \leftrightarrow$

f΄(x) = $\frac{1}{\sqrt{\chi^2+1}}$, χ∈ R

Η f΄(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων σταθερής με ρίζα πολυωνυμικής.

f΄΄(x) = $(\frac{1}{\sqrt{\chi^2+1}})΄ = -\frac{\chi}{(\sqrt{\chi^2+1})^3}$, χ∈ R

χ	−∞ 0	+∞
f΄΄(x)	+	−
f(x)	∪	∩

Η συνάρτηση μας παρουσιάζει ένα σημείο καμπής στο $\chi_0 = 0$ το f(0) = ln1 = 0

β) Η εφαπτομένη της f(χ) στο σημείο Ο(0,0) είναι ψ – f(0) = f΄(0)(χ – 0) ↔ ψ = χ. Επίσης η συνάρτηση στο (0,1) είναι κοίλη οπότε η εφαπτομένη της βρίσκεται πάνω από την γραφική της παράσταση, δηλαδή $\left|\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)-\mathrm{x}\right| = -\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)+\mathrm{x}$

Ε = $\int_0^1|f(x)-x|dx = \int_0^1\left|\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)-\mathrm{x}\right|dx = -\int_0^1\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)dx + \int_0^1 xdx = -\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}+\frac{1}{2}$

$\int_0^1\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)dx = \int_0^1(\mathrm{x})'\cdot\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)dx = [\mathrm{x}\cdot\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)]_0^1 - \int_0^1 x(\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)'dx = [\mathrm{x}\cdot\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{\chi^2+1}}dx = \ln(1+\sqrt{2}) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$

Δ3. $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{x}xln(f(x)) = \lim_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^2(\mathrm{x})xln(f(x)) = 0$

$\lim_{x\to 0^+}xln(f(x)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(f(x))}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2 f\prime(x)}{f(x)} = 0$

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση

h(x) = (x – 2)(1 – 3$\int_0^{x-2}f(t^2)dt$) + (x – 3)(8 – 3$\int_0^x f^2(t)dt$) στο [2,3] και θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano. Είναι συνεχής στο [2, 3] ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο (2, 3) ως πράξεις παραγωγίσιμων.

h(2) = – 8 + 3 $\int_0^2 f^2(t)dt$ < 0 γιατί f(x) < x , $f^2(x) < x^2$, $\int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}$

h(3) = 1 – 3 $\int_0^1 f(t^2)dt$ > 0 γιατί f(x) < x , $f(x^2) < x^2$, $\int_0^1 f(t^2)dt < \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ «ΠΕΔΙΟΥ ΓΝΩΣΗΣ»

ΟΥΡΑΝΙΑ ΓΙΑΝΝΑΡΑΚΗ