Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1] Έστω F(x) = cf(x)

F(x+h) – F(x) = cf(x+h) – cf(x) = c[f(x+h) – f(x)] οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$$

A_2] Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε σημεία χ_1, $\chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(\chi_1) > f(\chi_2)$

A_3] Μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή όταν μπορεί να πάρει μόνο «μεμονωμένες» τιμές, ενώ συνεχής όταν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών τιμών (α, β) .

A_4] α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B_1] $\nu = \sum_\iota \nu_\iota$ = 12 + 8 + 14 + 6 = 40

B_2]

κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα $f_i = \frac{v_i}{v}$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i v_i$
[2,4)	3	12	$\frac{12}{40} = 0{,}3$	12	36
[4,6)	5	8	$\frac{8}{40} = 0{,}2$	20	40
[6,8)	7	14	$\frac{14}{40} = 0{,}35$	34	98
[8,10)	9	6	$\frac{6}{40} = 0{,}15$	40	54
Σύνολο		40	1		228

B_3] α) $\bar{X} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{228}{40} = 5{,}7$

β) Οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλ.ευρώ είναι 6 +14+ 6 = 26

ΘΕΜΑ Γ

Γ$_1$] $f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική. Άρα $f΄(x) = 12x^2 - 7x + 1$ με α = 12, β = – 7 , γ = 1, Δ = 1 > 0 άρα έχει δύο ρίζες τις $f΄(x_{1,2}) = \frac{7 \pm 1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Επειδή οι θέσεις των πιθανών τοπικών ακροτάτων είναι εκεί που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος και θέλουμε $χ_1 < χ_2$ θεωρούμε ότι $χ_1 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ και $χ_2 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. Δηλαδή έχουμε ότι $P(K) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$

Επίσης $P(K) + P(A) + P(Π) = P(Ω) = 1$ παίρνουμε ότι $P(Π) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Γ$_2$] $P(Γ) = P(AUK) = P(A) + P(K) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$P(Δ) = P(Π) = \frac{5}{12}$

$P(E) = P(AUΠ΄) = P(A) + P(Π΄) - P(A \cap Π΄) = P(A) + 1 - P(Π) - P(A - Π) = \frac{7}{12}$

Γ$_3$] Επειδή $N(A) = N(Π) - 4$ θα ισχύει $P(A) = P(Π) - \frac{4}{N(Ω)}$ οπότε $\frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{N(Ω)}$ και έτσι $N(Ω) = 48$

ΘΕΜΑ Δ

Δ$_1$] $Εμβ = Εμβ_{παράπλευρης} + Εμβ_{βάσης}$ = (περίμετρος βάσης · ύψος) + μήκος · πλάτος = $20 \cdot 5 + χ \cdot ψ$

Όμως $Περίμετρος_{βάσης} = 20 \Rightarrow 2χ + 2ψ = 20 \Rightarrow ψ = 10 - χ$

Οπότε $Εμβ = 100 + χ(10 - χ) = -χ^2 + 10χ + 100$

Θεωρώντας σαν συνάρτηση $E(χ) = -χ^2 + 10χ + 100$ με $χ \in (0, 10)$ συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική παίρνουμε $E΄(χ) = -2χ + 10$

χ	0 5	10
Ε΄(χ)	+	–
Ε(χ)	$\nearrow$	$\searrow$

Άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση χ = 5 με μέγιστη τιμή $E(5) = 125$

Δ$_2$] Έχουμε ότι $2s^2 - 5s + 2 = 0$ με α = 2, β = – 5 , γ = 2, Δ = 9 > 0 άρα έχουμε δύο άνισες λύσεις τις $s_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2$ ή $\frac{1}{2}$

Μας έχει δώσει επίσης ότι το δείγμα μας δεν είναι ομοιογενές. Δηλαδή πρέπει CV > 10%

Για s = 2 cv = $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{8} > 10\%$ άρα την δεχόμαστε

Για s = $\frac{1}{2}$ cv = $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16} < 10\%$ άρα την απορρίπτουμε.

β) Από τον τύπο που μας έχει δώσει έχουμε ότι $s^2 = \frac{1}{\nu}\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{\nu} t_i)^2}{\nu}\} = \frac{1}{\nu}\sum t_i^2 - \bar{x}^2$ ➔ $2^2 = \frac{1}{\nu}\sum t_i^2 - 8^2$ ➔ $= \frac{1}{\nu}\sum t_i^2 = 68$ Άρα η μέση τιμή είναι 68.

Δ3] Η συνάρτηση Ε(χ) είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $E(\chi_1) > E(\chi_{15})$ και άρα το εύρος είναι $R = E(\chi_1) - E(\chi_{15}) - E(5) - E(9) = 125 - 109 = 16$

$E(x_i) > -4x_i + 9R + 1$ ➔ $x_i^2 - 14x_i + 45 < 0$

x	5		9
$x_i^2 - 14x_i + 45$	+	–	+

Οπότε $5 < \chi_\iota < 9$ δηλαδή δεν θα παίρνει τις δύο ακριανές τιμές

$\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_{15}\}$ ➔ $N(\Omega) = 15$

$B = \{A_2, A_3, \dots, A_{14}\}$ ➔ $N(B) = 13$ άρα $P(B) = \frac{13}{15}$